

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»



Л.П. Вязкова, Л.В. Мальцев, С.В. Бутаков

МЕХАНИКА

Часть 1

Учебное электронное текстовое издание
Подготовлено кафедрой «Детали машин»
Научный редактор: доц., канд. техн. наук И.В. Троицкий

Методические указания по выполнению расчетно-графических работ для студентов всех форм обучения всех специальностей.

Содержит общие указания по выполнению и оформлению расчетно-графических работ по дисциплинам «Механика», «Прикладная механика», «Основы конструирования машин», «Теория механизмов и машин» и примеры решения задач основных разделов указанных дисциплин. Состоят из трех частей. Каждая часть работ может использоваться независимо от другой. Предназначены для самостоятельной работы студентов при подготовке к зачетам и экзаменам.

© ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2005

Екатеринбург
2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Общие указания.....	3
Равновесие тела под действием плоской системы сил.....	5
Равновесие системы сил.....	7
Растяжение (сжатие).....	10
Кручение.....	18
Библиографический список.....	27

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение расчетно-графических работ (РГР) имеет большое значение для инженерной подготовки по дисциплинам «Механика», «Прикладная механика», «Прикладная физика». Решение комплексных задач по основным разделам дисциплины прививает студентам навыки самостоятельной работы, которые необходимы при выполнении курсовых и дипломных проектов и в практической инженерной деятельности.

Количество РГР и их объем определяется преподавателем в зависимости от времени, отводимого на изучение дисциплины в учебном плане специальности. Для большинства немашиностроительных специальностей РГР по механике содержат задачи по основным темам раздела «Основы расчетов прочностной и триботехнической надежности элементов конструкций».

В настоящем издании (часть 1) приведены общие методические указания по выполнению и оформлению РГР по дисциплине «Механика» и примеры решения типовых задач по темам: «Равновесие плоской системы сил», «Равновесие плоской системы тел», «Растяжение и сжатие», «Кручение». В приведенных примерах даны решения задач, аналогичных содержащимся в сборниках заданий [1, 2], которые преимущественно используются преподавателями кафедры «Детали машин» для заданий на РГР по курсу «Механика».

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

При оформлении РГР следует придерживаться требований стандарта СТП УПИ 1-85, содержащего указания по оформлению курсовых и дипломных проектов. РГР выполняются в виде расчетно-пояснительной записки на листах формата А4 (210x297мм). Содержание и оформление титульного листа показано на примере (рис. 1). По решению преподавателя допускается выполнение нескольких РГР в одной обложке. Последующие после титульного листы записки могут не иметь рамки и угловой надписи. В этом случае номер страницы указывается в правом верхнем углу с точкой. Текст должен быть написан чернилами или пастой. Схема, эскизы и другие графические построения выполняются карандашом. Для каждой задачи указывается ее номер, номера варианта численных данных и варианта схемы в виде, предложенном преподавателем. Далее следуют условие задачи, так как оно содержится в задании, расчетная схема и данные для расчета с условными обозначениями величин и указанием единиц их измерения.

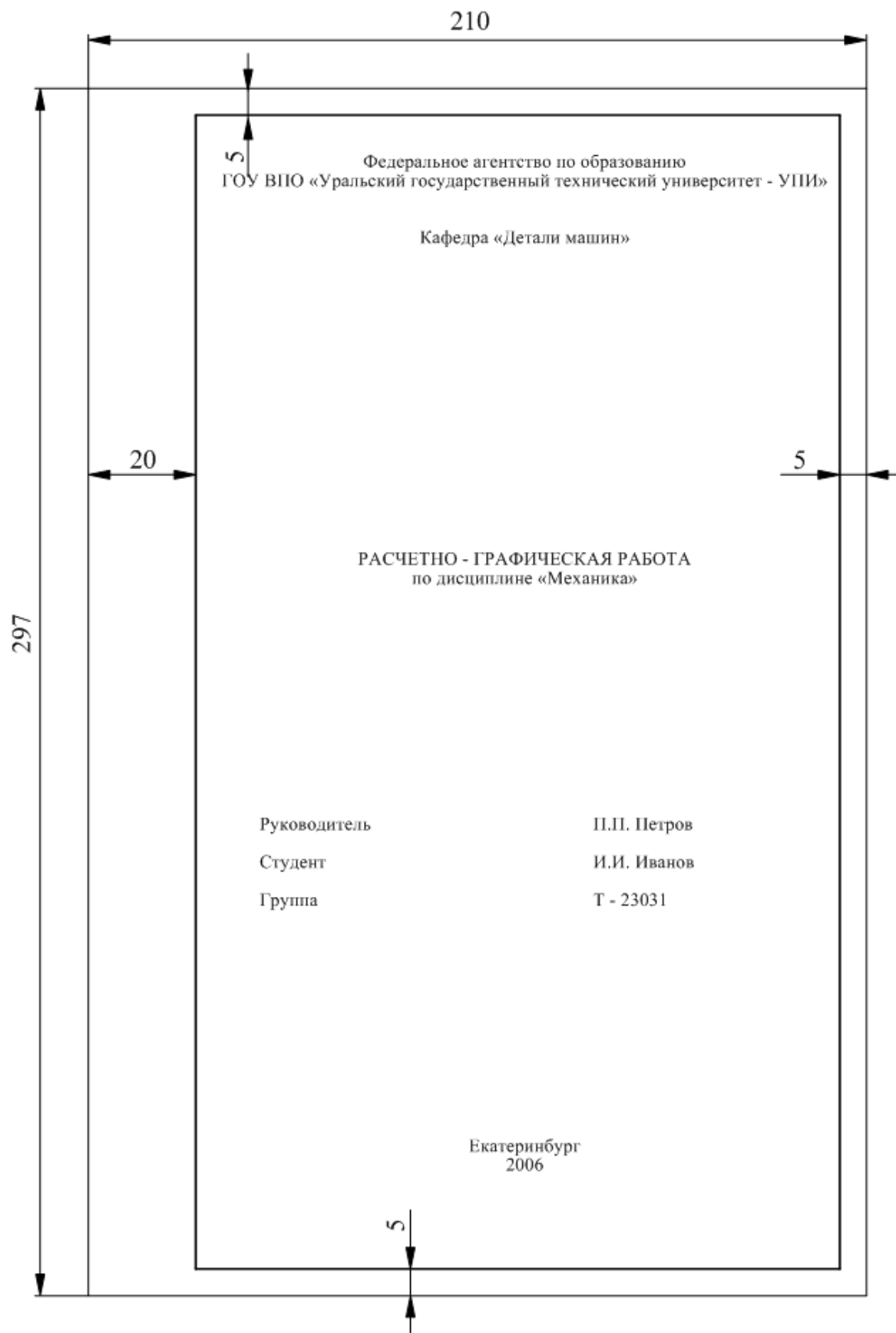


Рис. 1. Образец титульного листа

Желательно, чтобы последующее решение имело рубрикацию, то есть пункты и подпункты с соответствующим наименованием. Расчетные зависимости должны быть приведены в общем виде. Для общеизвестных зависимостей (закон Гука, условия прочности при различных видах деформаций и т. п.) допускается не указывать литературный источник и не приводить расшифровку обозначения величин. Подстановка численных данных производится в соизмеримых единицах измерения, которые указываются только для результата вычислений. По решению преподавателя библиографический список в конце записки можно не приводить.

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для передачи нагрузок стержень (брус, элемент конструкции) должен быть зафиксирован относительно корпуса (фундамента, плиты и т.д.). Фиксирование осуществляют с помощью так называемых опор, воспринимающих внешние силы.

Конструкции опор разнообразны, их схематическое изображение показано на рис. 2.

Различают следующие типы опор:

- **жесткое защемление-заделка** (рис.2, а), исключающее осевые и угловые смещения и воспринимающее осевые силы и моментную нагрузку;
- **шарнирно-неподвижная опора** (рис. 2, б), которая допускает лишь угловое смещение (поворот вокруг собственной оси) и поэтому не воспринимает моментные нагрузки;
- **шарнирно-подвижная опора** (рис. 2, в), которая не допускает смещения стержня только в направлении одной из осей и поэтому передает нагрузки лишь в направлении этой оси;
- **опора в виде жесткого стержня с шарнирным закреплением концов** (рис. 2, г) – здесь реакция направлена вдоль оси стержня. Стержни могут быть как растянутыми, так и сжатыми;
- **гибкая опора** (веревка, трос, цепь и т. д.) – реакция направлена вдоль нити и работает только на растяжение (рис. 2, д);
- **опора в виде гладкой поверхности** (рис. 2, е) – реакция всегда направлена по нормали к плоскости контакта;
- **опора в виде ребра угла (точечная опора)** – реакция направлена перпендикулярно гладкой поверхности опирающегося тела (рис. 2, ж).

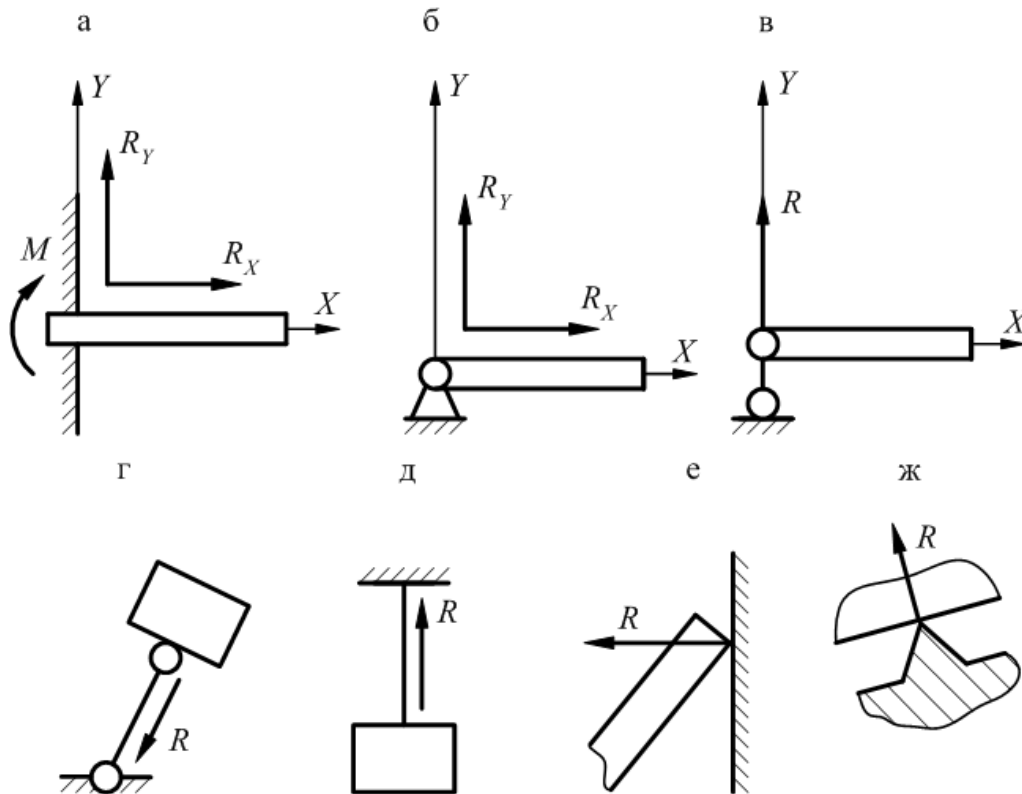


Рис. 2. Опоры стержней

Задача 1

Определить опорные реакции рамы (рис. 3) по следующим исходным данным: $F = 40\text{ Н}$; $q = 14\text{ Н/м}$; $M = 70\text{ Н}\cdot\text{м}$; $\alpha = 30^\circ$; $l_1 = 2\text{ м}$; $l_2 = 1,5\text{ м}$.

1. Выбираем систему координат осей X и Y (рис. 4).

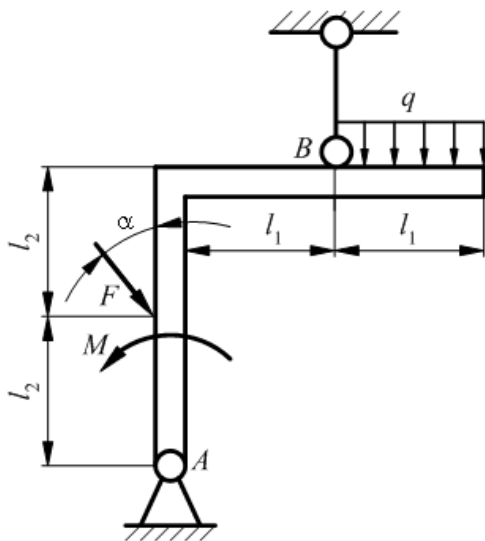


Рис. 3. Схема рамы

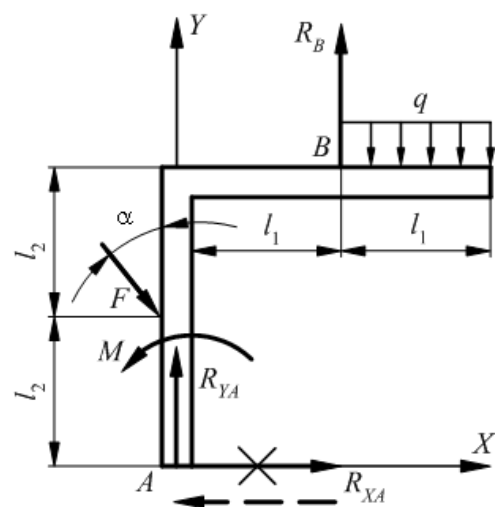


Рис. 4. Расчетная схема рамы

2. Используем принцип освобожденности от связей, заменяем действие связей их реакциями. В точке A – шарнирно-неподвижная опора, реакцию опоры A раскладываем на две составляющие: горизонтальную R_{XA} и вертикальную R_{YA} . В точке B – опора в виде жесткого стержня, реакция связи R_B будет направлена вдоль оси стержня.

3. Составляем уравнения равновесия и находим величины опорных реакций:

$$\sum M_A = 0;$$

$$\sum F_X = 0;$$

$$\sum F_Y = 0;$$

$$\sum M_A = M - Fl_2 \sin \alpha - ql_1 \left(l_1 + \frac{l_1}{2} \right) + R_B l_1 = 0;$$

$$R_B = \frac{Fl_2 \sin \alpha + ql_1 \left(l_1 + \frac{l_1}{2} \right) - M}{l_1} = \frac{40 \cdot 1,5 \sin 30^\circ + 14 \cdot 2 \left(2 + \frac{2}{2} \right) - 70}{2} = 22 \text{ Н};$$

$$\sum F_X = F \sin \alpha + R_{XA} = 0; \quad R_{XA} = -F \sin \alpha = -40 \sin 30^\circ = -20 \text{ Н};$$

$$\sum F_Y = -F \cos \alpha + R_B - ql_1 + R_{YA} = 0;$$

$$R_{YA} = F \cos \alpha + ql_1 - R_B = 40 \cos 30^\circ + 14 \cdot 2 - 22 = 40,6 \text{ Н}.$$

Значение опорной реакции R_{XA} получилось отрицательным. Необходимо направление реакции, ранее принятое произвольно, изменить на противоположное (рис. 4).

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ

Иногда в задачах статики приходится рассматривать равновесие не одного, а нескольких тел, связанных между собой и образующих неизменяемую систему. В этом случае для каждого тела можно составить три уравнения равновесия, если действующая на него система сил является плоской. Каждое тело или группу тел системы можно выделить и рассматривать в состоянии равновесия под действием приложенных к этой части системы внешних и внутренних сил. Такой прием решения задач на равновесие системы тел называется *методом расчленения*.

Задача 2

Определить опорные реакции и силы взаимодействия между частями составной конструкции (рис. 5) по следующим исходным данным:

$$F = 80 \text{ Н}; \quad q = 20 \text{ Н/м}; \quad M = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad \alpha = 60^\circ; \quad l_1 = 2 \text{ м}; \quad l_2 = 1,5 \text{ м}.$$

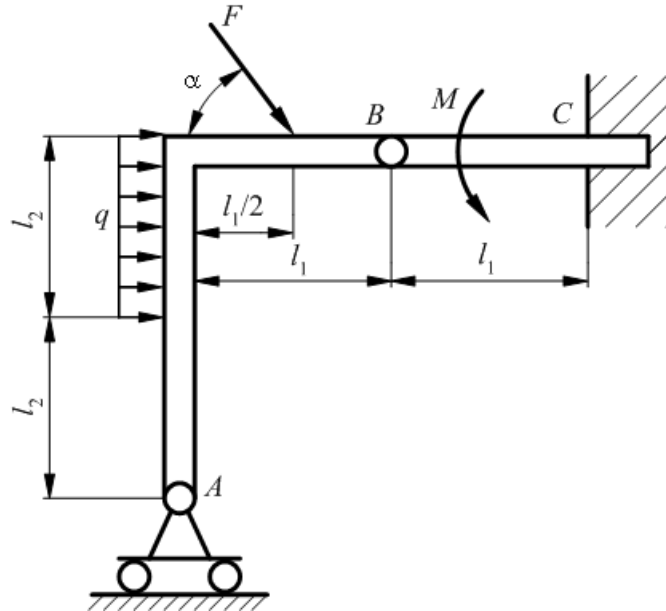


Рис. 5. Схема составной конструкции

1. В рассматриваемой задаче имеем систему двух сочлененных тел: рама AB и балка BC . Расчленим составную конструкцию на две части (рис. 6).

2. Выбираем систему координат осей X и Y (рис. 6).

3. Рассматриваем первую часть составной конструкции – раму AB . Используем принцип освобождаемости от связей, заменяем действие связей их реакциями. В точке A – шарнирно-подвижная опора, поэтому одна неизвестная сила R_A , а в точке сочленения тел B – две неизвестные силы R_{BX} и R_{BY} (рис. 6, а).

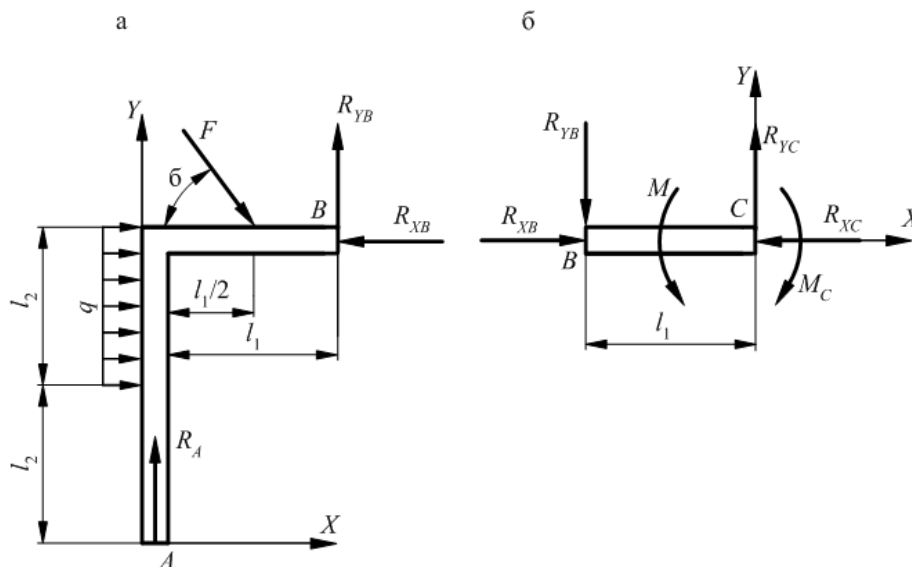


Рис. 6. Расчетная схема составной конструкции

4. Составляем уравнения равновесия и находим величину опорной реакции и величины сил взаимодействия между частями составной конструкции (рис. 6, а):

$$\sum F_X = 0;$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$\sum F_X = ql_2 + F \cos \alpha - R_{BX} = 0;$$

$$R_{BX} = ql_2 + F \cos \alpha = 20 \cdot 1,5 + 80 \cos 60^\circ = 70 \text{ Н};$$

$$\sum M_A = R_{BX} 2l_2 + R_{BY} l_1 - F \cos \alpha \cdot 2l_2 - F \sin \alpha \frac{l_1}{2} - 1,5ql_2^2 = 0;$$

$$R_{BY} = \frac{2Fl_2 \cos \alpha + 0,5Fl_1 \sin \alpha + 1,5ql_2^2 - 2R_{BX}l_2}{l_1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 80 \cdot 1,5 \cos 60^\circ + 0,5 \cdot 80 \cdot 2 \sin 60^\circ + 1,5 \cdot 20 \cdot 1,5^2 - 2 \cdot 70 \cdot 1,5}{2} = 23,4 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = \frac{-R_A l_1 + 0,5ql_2^2 + F \sin \alpha l_1}{2} = 0;$$

$$R_A = \frac{0,5ql_2^2 + 0,5Fl_1 \sin \alpha}{l_1} = \frac{0,5 \cdot 20 \cdot 1,5^2 + 0,5 \cdot 80 \cdot 2 \sin 60^\circ}{2} = 45,9 \text{ Н}.$$

5. Рассматриваем вторую часть составной конструкции – балку BC. В точке C – жесткое защемление, поэтому две неизвестные силы: R_{CX} , R_{CY} и момент M_C (рис. 6, б).

6. Составляем уравнение равновесия и находим величины опорных реакций:

$$\sum F_X = 0;$$

$$\sum F_Y = 0;$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$\sum F_X = R_{BX} - R_{CX} = 0;$$

$$R_{CX} = R_{BX} = 70 \text{ Н}.$$

$$R_{CY} = R_{BY} = 23,4 \text{ Н}.$$

$$\sum M_C = M + R_{BY} l_1 - M_C = 0;$$

$$M_C = M + R_{BY} l_1 = 100 + 23,4 \cdot 2 = 146,8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Задача 3

Для стального стержня круглого поперечного сечения (рис. 7), нагруженного системой внешних сил F , построить эпюры нормальных сил N , нормальных напряжений σ , перемещений Δl и проверить его на прочность, если допускаемое нормальное напряжение $[\sigma] = 160$ МПа и заданы размеры стержня d и l .

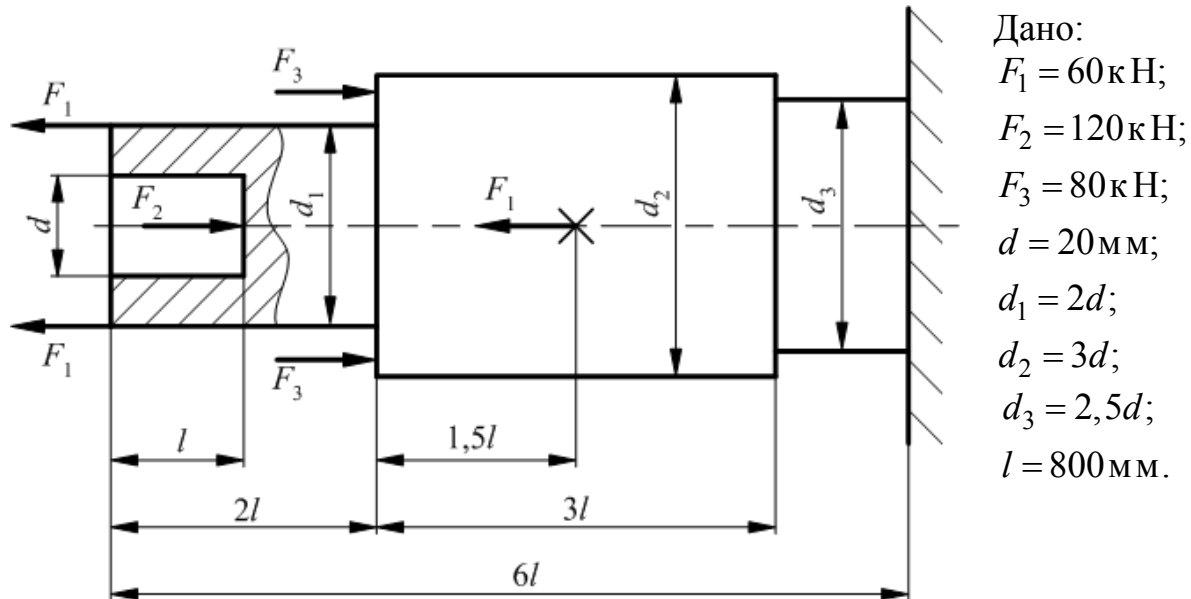


Рис. 7. Схема стержня

1. Определение реакции опоры

Анализ внутренних сил начинается с определения опорных реакций, то есть освобождения стержня от связей с другими элементами конструкций (опорами и др.). Для этого выбираем положительное направление оси X , показанное на рис. 8, а. Под действием внешних нагрузок в местах закрепления стержня возникают опорные реакции. Направление опорной реакции R выбираем произвольно (рис. 8, а). Для определения опорной реакции R составляем уравнение равновесия. Сумма проекций на ось X всех сил, приложенных к стержню, вместе с реакцией опоры равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{Xi} = 0$$

$$2F_1 - F_2 - 2F_3 + F_1 + R = 0.$$

Отсюда:

$$R = F_2 + 2F_3 - 2F_1 - F_1 = 120 + 2 \cdot 80 - 2 \cdot 60 - 60 = 100 \text{ кН}.$$

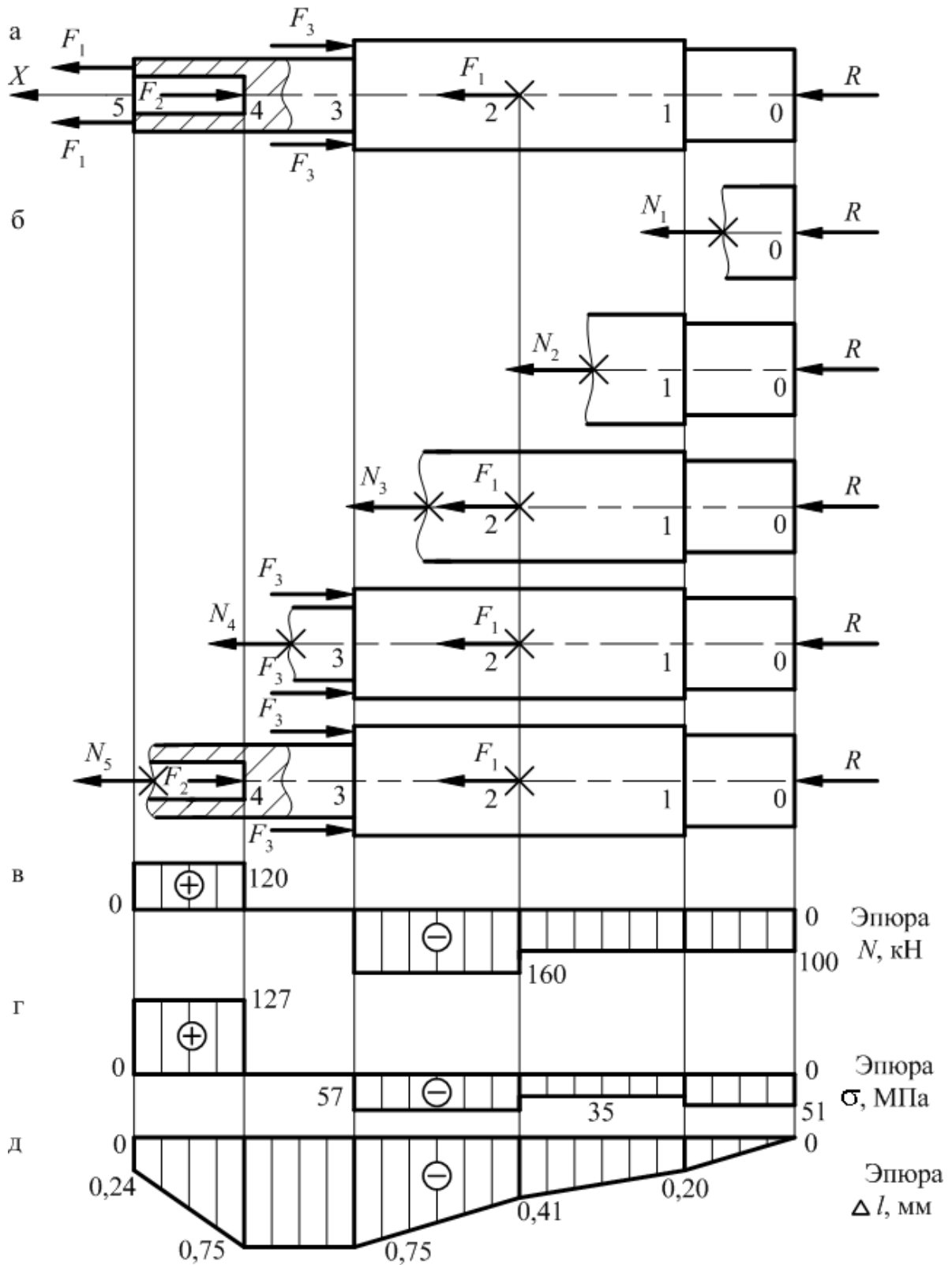


Рис. 8. Расчетная схема стержня (а); схемы к определению продольных сил на отдельных участках (б); эпюра продольных сил N (в); эпюра нормальных напряжений σ (г); эпюра перемещений Δl (д)

После решения уравнения равновесия уточняем направление опорной реакции, если реакция получена со знаком плюс, то направление выбрали верно, если со знаком минус, то ее направление следует изменить на противоположное.

2. Определение продольных сил

Условимся считать продольную силу положительной, если она растягивает стержень, и отрицательной – если сжимает.

2.1. Разобьем стержень на участки сечениями 0, 1, 2, 3, 4 и 5, начиная от закрепленного конца. Границы участков определяются точками приложения внешних сил или местами изменения размеров поперечного сечения, а также начало и конец конструкции. В соответствии с расчетной схемой получили участки: 1 участок – 01, 2 участок – 12, 3 участок – 23, 4 участок – 34, 5 участок – 45 (рис. 8, а).

Применяем метод сечений. Для этого мысленно рассекаем стержень в пределах каждого участка. Отбрасываем левую часть, рассматриваем равновесие оставшейся правой части стержня (рис. 8, б) и составляем для нее условие равновесия – сумму проекций всех внешних и внутренних сил на ось X :

$$\sum_{i=1}^n (F_{Xi} + N_{Xi}) = 0.$$

Внутреннюю продольную силу N , величина и направление которой заранее неизвестны, направляем предварительно от сечения, что соответствует растяжению этого участка стержня.

После решения уравнения равновесия находим величину продольной силы и уточняем ее направление: если получен знак плюс, то направление выбрано правильно, если минус, то направление следует изменить на противоположное. Продольные силы в уравнениях равновесия берем со знаком плюс, так как их направление совпадает с принятым положительным направлением оси X .

Рассмотрим уравнение равновесия:

$$\sum_{i=1}^n (F_{Xi} + N_{Xi}) = 0.$$

Участок 1: $R + N_1 = 0$; $N_1 = -R = -100$ кН.

Участок 2: $R + N_2 = 0$; $N_2 = -R = -100$ кН.

Участок 3: $R + F_1 + N_3 = 0$; $N_3 = -R - F_1 = -100 - 60 = -160$ кН.

Участок 4: $R + F_1 - 2F_3 + N_4 = 0$; $N_4 = -R - F_1 + 2F_3 = -100 - 60 + 2 \cdot 80 = 0$.

Участок 5: $R + F_1 - 2F_3 - F_2 + N_5 = 0$; $N_5 = -R - F_1 + 2F_3 + F_2 = -100 - 60 + 2 \cdot 80 = 0$.

Таким образом, на первом, втором и третьем участках стержень сжат, на пятом участке – растянут, а на четвертом участке стержня продольная сила равна нулю. Это означает, что стержень на этом участке не нагружен. В пределах каждого участка продольная сила остается постоянной и изменяется скачкообразно на границах участков, где приложены внешние силы. В

соответствии с полученными данными строим эпюру продольных сил (рис. 8, в). Для этого от нулевой линии параллельной оси стержня откладываем в определенном масштабе значения продольных сил N .

3. Определение нормальных напряжений

3. 1. Полагаем, что в пределах действия закона Гука плоские поперечные сечения стержня смещаются при растяжении (сжатии) параллельно начальным положениям, оставаясь плоскими (гипотеза плоских сечений), следовательно, нормальные напряжения во всех точках сечения должны быть одинаковыми.

Учитывая эту гипотезу, имеем:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где A – площадь поперечного сечения.

Для определения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня разделим значения продольных сил с учетом знаков N на соответствующие площади поперечных сечений.

$$\text{Участок 1: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi d_3^2} = \frac{4(-100)10^3}{3,14(2,5 \cdot 20)^2} = -51 \text{ МПа.}$$

$$\text{Участок 2: } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} = \frac{4(-100)10^3}{3,14(3 \cdot 20)^2} = -35 \text{ МПа.}$$

$$\text{Участок 3: } \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{4N_3}{\pi d_2^2} = \frac{4(-160)10^3}{3,14(3 \cdot 20)^2} = -57 \text{ МПа.}$$

$$\text{Участок 4: } \sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{4N_4}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0}{3,14(2 \cdot 20)^2} = 0.$$

$$\text{Участок 5: } \sigma_5 = \frac{N_5}{A_5} = \frac{4N_5}{\pi(d_1^2 - d^2)} = \frac{4 \cdot 120 \cdot 10^3}{3,14[(2 \cdot 20)^2 - 20^2]} = 127 \text{ МПа.}$$

Эпюру нормальных напряжений σ по длине стержня строим аналогично эпюре продольных сил (рис. 8, г).

3. 2. Проверим стержень на прочность. Условие прочности при растяжении (сжатии):

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Из эпюры нормальных напряжений (рис. 8, г) следует, что наибольшее напряжение возникает в пределах пятого участка:

$$\sigma_{\max} = \sigma_5 = 127 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Отсюда следует, что условие прочности удовлетворяется.

4. Определение перемещений

При расчете упругих перемещений стержня от действия нескольких сил применяем принцип независимости действия сил: суммарное перемещение свободного конца стержня от действия группы сил получим как сумму перемещений от действия каждой силы в отдельности.

$$\Delta l = \frac{\sum_{i=1}^n N_i l_i}{EA_i},$$

где E – модуль упругости, для сталей $E = (2...2,2)10^5$ МПа.

Полагаем, что сечение оси 0 (рис. 8, а), контактирующее с опорой, после приложения нагрузки не переместится. Перемещение сечения 1 определяется удлинением первого участка стержня:

$$\Delta l = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{(-100)10^3 \cdot 800 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14(2,5 \cdot 20)^2} = -0,20 \text{ мм.}$$

Условимся, перемещение стержня при растяжении считать положительным, а при сжатии – отрицательным.

Перемещение сечения 2 определяется деформациями участков 1 и 2:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_{12} = \Delta l_1 + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -0,20 - \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 800 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14(3 \cdot 20)^2} = -0,41 \text{ мм.}$$

Перемещение сечения 3 определяется деформациями 1-, 2- и 3-го участков:

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \Delta l_{23} = \Delta l_2 + \frac{N_3 l_3}{EA_3} = -0,41 - \frac{160 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 800 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14(3 \cdot 20)^2} = -0,75 \text{ мм.}$$

Перемещение сечения 4 определяется деформациями 1-, 2-, 3- и 4-го участков:

$$\Delta l_4 = \Delta l_3 + \Delta l_{34} = \Delta l_3 + \frac{N_4 l_4}{EA_4} = -0,75 + \frac{0 \cdot 800 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14(3 \cdot 20)^2} = -0,75 \text{ мм.}$$

Перемещение сечения 5 определяется деформациями участков 1, 2, 3, 4 и 5:

$$\begin{aligned} \Delta l_5 &= \Delta l_4 + \Delta l_{45} = \Delta l_4 + \frac{N_5 l_5}{EA_5} = -0,75 + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 800 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14[(3 \cdot 20)^2 - 20^2]} = \\ &= -0,24 \text{ мм.} \end{aligned}$$

За начало отсчета при построении эпюры перемещения примем сечение заделки, где у стержня нет перемещений. Найденные значения Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 , Δl_4 и Δl_5 с учетом знака числового значения в определенном масштабе откладываем от базовой линии в соответствующих сечениях 1, 2, 3, 4 и 5. Полученные таким образом точки, начиная с нулевой точки в нулевом сечении, последовательно соединяем прямыми линиями и получаем эпюру перемещений.

Задача 4

Для стального стержня (рис. 9), нагруженного системой внешних сил F , определить максимально возможное значение силы F из условия прочности на наиболее нагруженном участке, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ и заданы размеры стержня l и d . Построить эпюры нормальных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений Δl .

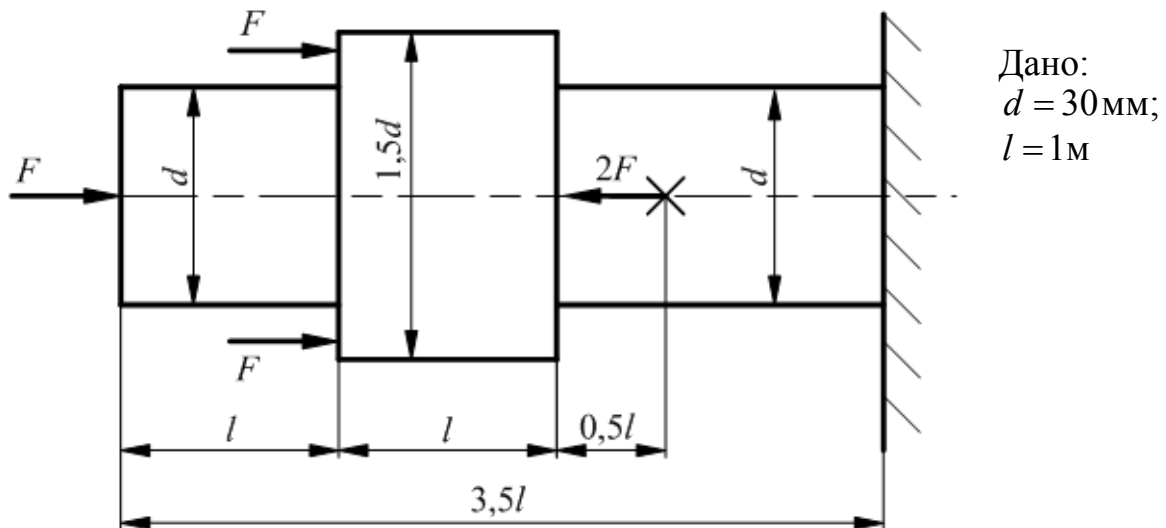


Рис. 9. Схема стержня

1. Определение реакции опоры

Выбираем положительное направление оси X (рис. 10, а).

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0;$$

$$-F - 2F + 2F + R = 0.$$

Отсюда: $R = F + 2F - 2F = F$

2. Определение продольных сил

2. 1. Разбиваем сечениями стержень на участки: 1 участок – 01, 2 участок – 12, 3 участок – 23, 4 участок – 34 (рис. 10, а).

2. 2. Применяем метод сечений. Для этого мысленно рассекаем стержень в пределах каждого участка, отбрасываем левую часть, рассматриваем равновесие оставшейся правой части стержня (рис. 10, б) и составляем для нее уравнение равновесия:

$$\sum_{i=1}^n (F_{xi} + N_{xi}) = 0.$$

Участок 1: $R + N_1 = 0$; $N_1 = -R = -F$.

Участок 2: $R + 2F + N_2 = 0$; $N_2 = -R - 2F = -3F$.

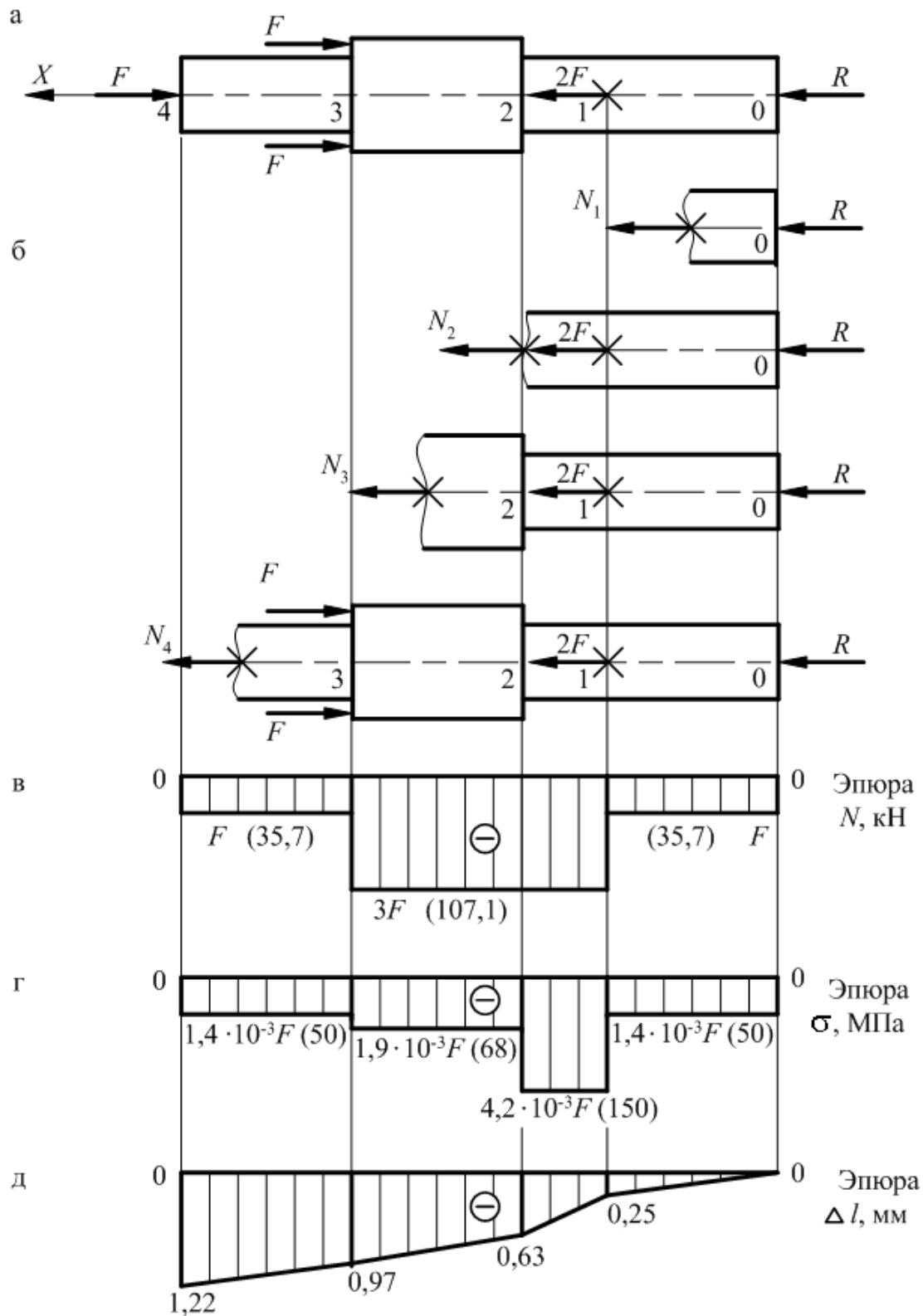


Рис. 10. Расчетная схема стержня (а); схемы к определению продольных сил на отдельных участках (б); эпюра продольных сил N (в); эпюра нормальных напряжений σ (г); эпюра перемещений Δl (д)

$$\text{Участок 3: } R + 2F + N_3 = 0; N_3 = -R - 2F = -3F.$$

$$\text{Участок 4: } R + 2F - 2F + N_4 = 0; N_4 = -R - 2F + 2F = -F.$$

Таким образом, стержень на всех участках сжат. По полученным значениям строим эпюру продольных сил N (рис. 10, в).

3. Определение нормальных напряжений

3. 1. Нормальное напряжение σ в поперечном сечении стержня при растяжении равно поделенной на площадь сечения продольной силе N , с учетом знаков N , в этом же сечении.

$$\text{Участок 1: } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi d^2} = -\frac{4F}{3,14 \cdot 30^2} = -1,4 \cdot 10^{-3} F.$$

$$\text{Участок 2: } \sigma_1 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d^2} = -\frac{4 \cdot 3F}{3,14 \cdot 30^2} = -4,2 \cdot 10^{-3} F.$$

$$\text{Участок 3: } \sigma_1 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{4N_3}{\pi(1,5d)^2} = -\frac{4 \cdot 3F}{3,14 \cdot (1,5 \cdot 30)^2} = -1,9 \cdot 10^{-3} F.$$

$$\text{Участок 4: } \sigma_1 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{4N_4}{\pi d^2} = -\frac{4F}{3,14 \cdot 30^2} = -1,4 \cdot 10^{-3} F.$$

По полученным значениям нормальных напряжений строим эпюру (рис. 10, г).

3. 2. Из условия прочности определяем максимально возможное значение силы F :

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma].$$

Из эпюры нормальных напряжений следует, что наибольшее напряжение возникает в пределах второго участка:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 4,2 \cdot 10^{-3} F < [\sigma] = 150 \text{ МПа}.$$

Отсюда:

$$F_{\max} \leq \frac{150}{4,2 \cdot 10^{-3}} = 35,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 35,7 \text{ кН}.$$

3. 3. Определяем числовые значения продольных сил и нормальных напряжений по участкам:

$$\text{Участок 1: } N_1 = -F = -35,7 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = -1,4 \cdot 10^{-3} F = -1,4 \cdot 10^{-3} \cdot 35,7 \cdot 10^3 = -50 \text{ МПа}.$$

$$\text{Участок 2: } N_2 = -3F = -3 \cdot 35,7 = -107,1 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = -4,2 \cdot 10^{-3} F = -4,2 \cdot 10^{-3} \cdot 35,7 \cdot 10^3 = -150 \text{ МПа}.$$

$$\text{Участок 3: } N_3 = -3F = -3 \cdot 35,7 = -107,1 \text{ кН};$$

$$\sigma_3 = -1,9 \cdot 10^{-3} F = -1,9 \cdot 10^{-3} \cdot 35,7 \cdot 10^3 = -68 \text{ МПа}.$$

Участок 4: $N_4 = -F = -35,7 \text{ кН}$;

$$\sigma_4 = -1,4 \cdot 10^{-3} F = -1,4 \cdot 10^{-3} \cdot 35,7 \cdot 10^3 = -50 \text{ МПа}.$$

4. Определение перемещений

Перемещение стержня от действия системы сил получим как сумму перемещений от действия каждой силы в отдельности:

$$\Delta l = \frac{\sum_{i=1}^n N_i l_i}{EA_i}$$

Полагаем, что сечение 0 (рис. 10, а), контактирующее с опорой, после приложения нагрузки не переместится. Перемещение сечения 1 определяется удлинением 1-го – участка стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{-35,7 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 30^2} = -0,25 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения 2 определится деформациями 1 и 2 участков:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_{12} = \Delta l_1 + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -0,25 - \frac{107,1 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 30^2} = -0,63 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения 3 определится деформациями 1, 2 и 3 участков:

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \Delta l_{23} = \Delta l_2 + \frac{N_3 l_3}{EA_3} = -0,63 - \frac{107,1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot (1,5 \cdot 30)^2} = -0,97 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения 4 определится деформациями 1, 2, 3 и 4 участков:

$$\Delta l_4 = \Delta l_3 + \Delta l_{34} = \Delta l_3 + \frac{N_4 l_4}{EA_4} = -0,97 - \frac{35,7 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 30^2} = -1,22 \text{ мм}.$$

По полученным значениям строим эпюру перемещений (рис. 10, д).

КРУЧЕНИЕ

Задача 5

Стальной вал (рис. 11) с установленными на него деталями (это могут быть зубчатые колеса, звездочки цепных передач, шкивы ременных передач и др.) вращается с постоянной угловой скоростью ω , соответствующей частоте вращения $n = 200 \text{ мин}^{-1}$. К детали 1, являющейся ведущей, подводится мощность $P = 24 \text{ кВт}$, при этом возникает момент движущих сил T_1 .

Детали 2, 3, 4, 5 являются ведомыми и моменты сил сопротивления на них соответственно равны T_2, T_3, T_4, T_5 . Допускаемое напряжение кручения материала вала $[\tau] = 90 \text{ МПа}$. Допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] = 0,6 \text{ град./м}$. Диаметры участков вала связаны соотношением $d_1 = 1,2d_2$, длина $l = 100 \text{ мм}$.

При заданном расположении деталей на валу (рис. 11) и соотношении между моментами сил сопротивления $T_2 = T_4$; $T_3 = T_5 = 2T_2$ выполните следующее:

- постройте эпюру крутящих моментов M_K ;
- рассчитайте диаметры участков вала d_1 и d_2 , отвечающие условиям прочности и жесткости;
- постройте эпюру касательных напряжений τ ;
- постройте эпюру углов закручивания φ .

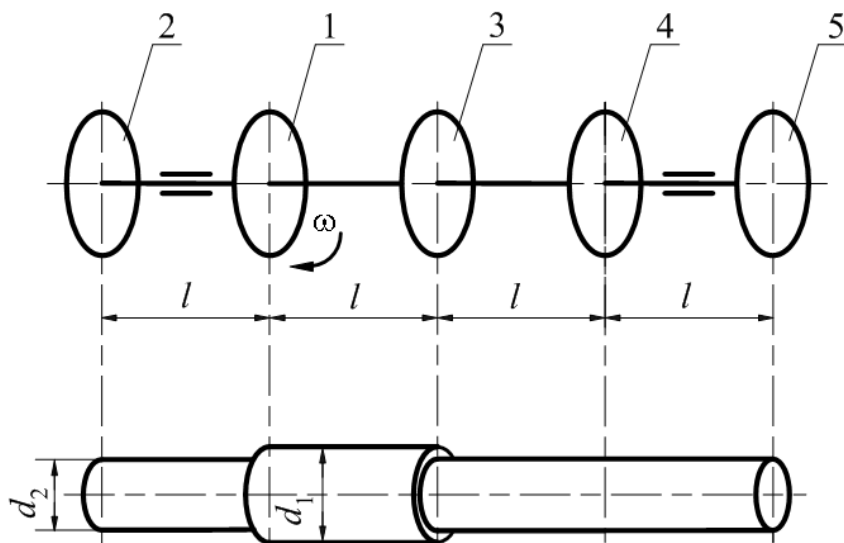


Рис. 11. Схема к задаче 5

Дано:

$$P = 24 \text{ кВт};$$

$$n = 200 \text{ мин}^{-1};$$

$$T_2 = T_4;$$

$$T_3 = T_5 = 2T_2;$$

$$[\tau] = 90 \text{ МПа};$$

$$[\theta] = 0,6 \text{ град./м};$$

$$l = 100 \text{ мм};$$

$$d_1 = 1,2d_2.$$

Определить:

$$M_K, d_1, d_2, \varphi, \tau$$

1. Определение моментов внешних сил

Момент движущих сил определяем по формуле:

$$T_1 = 9550 \frac{P}{n},$$

где P – мощность, кВт; n – частота вращения, мин^{-1} .

$$T_1 = 9550 \frac{24}{200} = 1146 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По условию задачи вал вращается с постоянной угловой скоростью ω , то есть, находится в состоянии равновесия. Следовательно, момент сил движущих уравновешивает сумму моментов сил сопротивления:

$$T_1 = T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

С учетом заданного соотношения моментов внешних сил сопротивления $T_2 = T_4$ и $T_3 = T_5 = 2T_2$ определяем T_1 :

$$T_1 = T_2 + 2T_2 + T_2 + 2T_2 = 6T_2.$$

Моменты сил сопротивления:

$$T_2 = T_4 = \frac{T_1}{6} = \frac{1146}{6} = 191 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_3 = T_5 = 2T_2 = 2 \cdot 191 = 382 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Направление момента сил движущих T_1 совпадает с направлением вращения вала, моменты сил сопротивления T_2, T_3, T_4, T_5 направлены противоположно T_1 .

2. Определение крутящих моментов в поперечных сечениях вала.

Построение эпюры M_K

Для определения внутренних крутящих моментов M_K , возникающих под действием внешних скручивающих моментов T , используем метод сечений. Вал разбиваем на участки. Границами участков принимаем сечения вала A, B, C, D, E , в которых приложены моменты внешних сил (рис. 12, а). Необходимо также обратить внимание (рис. 12, б), что участок $B-C$ и участки $A-B, C-D, D-E$ имеют разные размеры поперечного сечения. Эта информация потребуется в дальнейшем при построении эпюр напряжений и деформаций.

Крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к валу справа или слева от сечения.

Диаграмму, показывающую распределение значений крутящих моментов по длине вала, называют эпюрой крутящих моментов. Для построения эпюры M_K необходимо условиться о правиле знаков. В настоящих методических указаниях принято, что крутящий момент считается положительным, если при взгляде со стороны отброшенной части вала на сечение он направлен против хода часовой стрелки, и отрицательным – если по ходу часовой стрелки.

Участок $A-B$

Рассечем вал на участке $A-B$, отбросим правую часть и рассмотрим равновесие оставшейся части. Действие отброшенной части вала заменяем внутренним крутящим моментом $M_{K A-B}$ (рис. 12, в).

$$T_2 - M_{K A-B} = 0;$$

$$M_{K A-B} = T_2 = 191 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент $M_{K A-B}$ в сечении направлен по часовой стрелке, поэтому согласно правилу знаков этот момент следует считать отрицательным. При построении эпюры крутящих моментов на участке $A-B$ отложим числовое значение $M_{K A-B}$ ниже базовой линии.

Аналогично определяем крутящие моменты M_K на участках $B-C$ (рис. 12, г), $C-D$ (рис. 12, д) и $D-E$ (рис. 12, е).

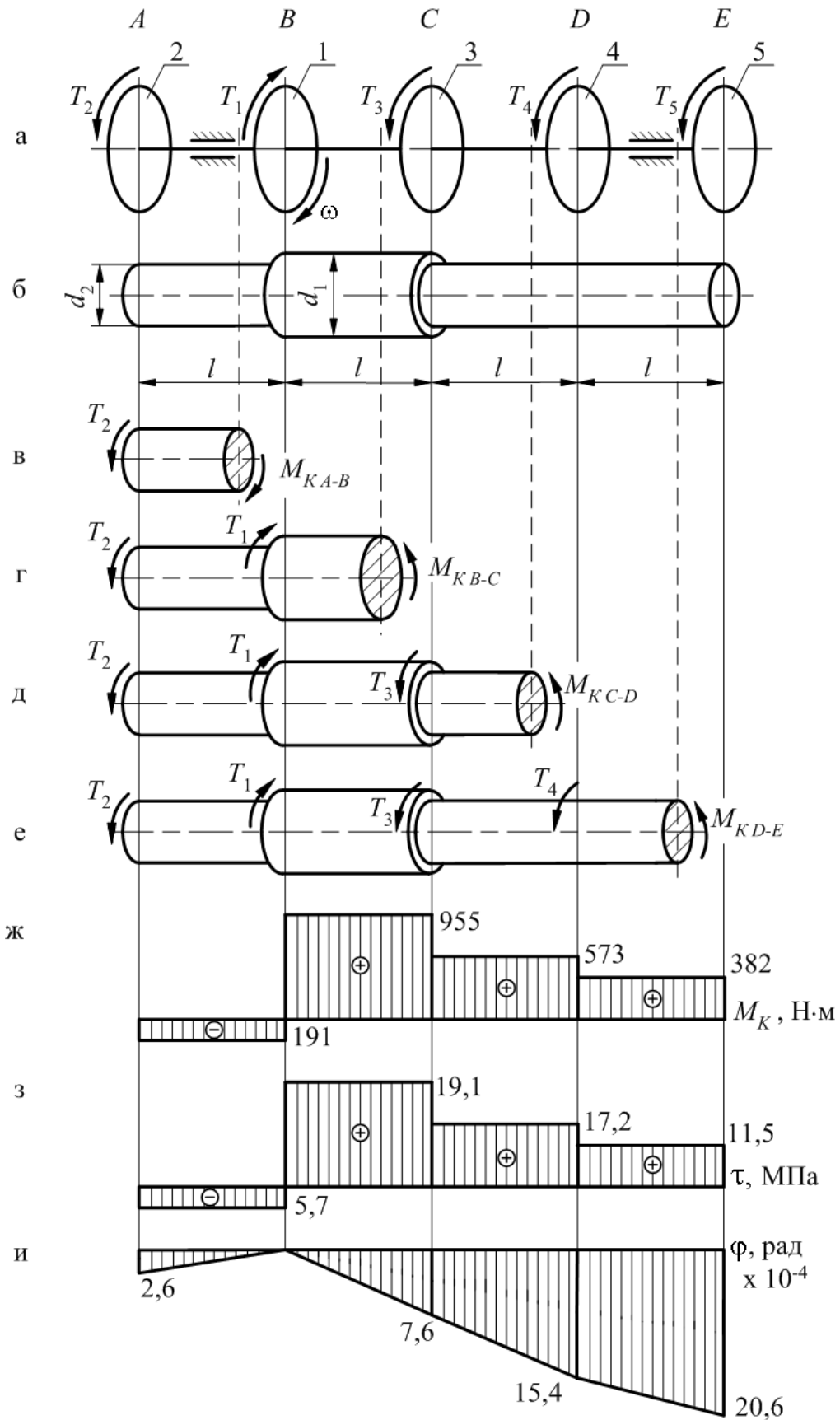


Рис. 12. Расчетные схемы и эпюры к задаче 5

Участок B–C

$$M_{KB-C} + T_2 - T_1 = 0;$$

$$M_{KB-C} = T_1 - T_2 = 1146 - 191 = 955 \text{ Н·м.}$$

Участок C–D

$$M_{KC-D} + T_2 + T_3 - T_1 = 0;$$

$$M_{KC-D} = T_1 - T_2 - T_3 = 1146 - 191 - 382 = 573 \text{ Н·м.}$$

Участок D–E

$$M_{KD-E} + T_2 + T_3 + T_4 - T_1 = 0;$$

$$M_{KD-E} = T_1 - T_2 - T_3 - T_4 = 1146 - 191 - 382 - 191 = 382 \text{ Н·м.}$$

Крутящие моменты M_{KB-C} , M_{KC-D} , M_{KD-E} в сечениях направлены против хода часовой стрелки, поэтому согласно правилу знаков эти моменты следует считать положительными. При построении эпюры крутящих моментов на участках B–C, C–D, D–E откладываем числовые значения этих моментов выше базовой линии.

Строим эпюру M_K . Проводим параллельно оси вала базовую (нулевую) линию (рис. 12, ж). В определенном масштабе от базовой линии откладываем значения M_K по участкам.

В тех сечениях вала, где приложены моменты внешних сил, на эпюре M_K имеет место «скачок» на величину и в направлении действия момента.

3. Определение диаметров участков вала

3. 1. Определение диаметров участков вала из условия прочности

Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K \max}}{W_p} \leq [\tau],$$

где W_p – полярный момент сопротивления сечения. Для сплошного круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0,2d^3.$$

В формулу условия прочности вводится абсолютная величина M_K .

Из условия прочности при кручении диаметр вала можно определить по формуле:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{K \max}}{0,2[\tau]}}.$$

Вал на участке B–C диаметром d_1 нагружен максимальным моментом $M_{KB-C} = 955 \text{ Н·м}$.

На участках вала диаметром d_2 максимальный момент находится на участке C–D, $M_{KC-D} = 573 \text{ Н·м}$.

Однозначно определить наиболее опасное сечение вала из условия прочности при разных размерах поперечного сечения вала невозможно. Поэтому рассмотрим участки $B-C$ и $C-D$.

Полярный момент сопротивления для участка $B-C$:

$$W_{\rho 1} \cong 0,2d_1^3.$$

Для остальных участков:

$$W_{\rho 2} \cong 0,2d_2^3.$$

Участок $B-C$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{K B-C}}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{955 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 90}} = 37,6 \text{ мм.}$$

Участок $C-D$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{M_{K C-D}}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{573 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 90}} = 31,7 \text{ мм.}$$

По условию задачи $d_1 = 1,2d_2$, тогда $d_1 = 1,2 \cdot 31,7 = 38,04 \text{ мм.}$

3. 2. Определение диаметров участков вала из условия жесткости

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания не превышал допустимого относительного угла закручивания:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{K \max}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta],$$

где θ_{\max} – максимальный относительный угол закручивания в радианах на единицу длины вала; G – модуль сдвига для стали, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; J_{ρ} – полярный момент инерции сечения; $[\theta]$ – допустимый относительный угол закручивания в радианах на единицу длины вала.

Полярные моменты инерции для участков с диаметрами d_1 и d_2 равны соответственно:

$$J_{\rho 1} = \frac{\pi d_1^4}{32} \cong 0,1d_1^4 = 0,1(1,2d_2)^4 \cong 0,21d_2^4,$$

$$J_{\rho 2} = \frac{\pi d_2^4}{32} \cong 0,1d_2^4.$$

Допускаемый угол закручивания $[\theta]$ переведем в рад/мм:

$$[\theta] = 0,6 \text{ град./м} = \frac{0,6\pi 10^{-3}}{180} = 0,105 \cdot 10^{-4} \text{ рад/мм.}$$

Относительные углы поворотов сечений по участкам:

участок $A-B$

$$\theta_{A-B} = \frac{M_{K A-B}}{GJ_{\rho 2}} = \frac{M_{K A-B}}{G0,1d_2^4} = \frac{-191 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1d_2^4} = -\frac{23,88}{d_2^4} \text{ рад/мм};$$

участок B–C

$$\theta_{B-C} = \frac{M_{KB-C}}{GJ_{\rho 1}} = \frac{M_{KB-C}}{G0,21d_2^4} = \frac{955 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,21d_2^4} = \frac{56,85}{d_2^4} \text{ рад/мм};$$

участок C–D

$$\theta_{C-D} = \frac{M_{KC-D}}{GJ_{\rho 2}} = \frac{M_{KC-D}}{G0,1d_2^4} = \frac{573 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1d_2^4} = \frac{71,63}{d_2^4} \text{ рад/мм};$$

участок D–E

$$\theta_{D-E} = \frac{M_{KD-E}}{GJ_{\rho 2}} = \frac{M_{KD-E}}{G0,1d_2^4} = \frac{382 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1d_2^4} = \frac{47,75}{d_2^4} \text{ рад/мм}.$$

Из условия жесткости при кручении определяем d_2 . Расчет выполняем для участка C–D, так как на этом участке максимальный относительный угол поворота сечения.

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{M_{KC-D}}{0,1G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{573 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,105 \cdot 10^{-4}}} = 51,1 \text{ мм}.$$

Определяем $d_1 = 1,2d_2 = 1,2 \cdot 51,1 = 61,3 \text{ мм}$.

3.3. Определение диаметров участков вала из условий прочности и жесткости

Из условия прочности $d_1 = 38,04 \text{ мм}$, $d_2 = 31,7 \text{ мм}$; из условия жесткости $d_1 = 61,3 \text{ мм}$, $d_2 = 51,1 \text{ мм}$.

Расчетные максимальные значения диаметров d_1 и d_2 округляем по ряду чисел R_{40} , получаем $d_1 = 63 \text{ мм}$, $d_2 = 55 \text{ мм}$.

4. Построение эпюры касательных напряжений τ

Величину касательного напряжения на поверхности вала можно определить по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho}.$$

Определяем касательные напряжения по участкам.

Участок A–B

$$\tau_{\max A-B} = \frac{M_{KA-B}}{W_{\rho 2}} = \frac{-191 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 55^3} = -5,7 \text{ МПа}.$$

Участок B–C

$$\tau_{\max B-C} = \frac{M_{KB-C}}{W_{\rho 1}} = \frac{955 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 63^3} = 19,1 \text{ МПа}.$$

Участок C–D

$$\tau_{\max C-D} = \frac{M_{KC-D}}{W_{\rho 2}} = \frac{573 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 55^3} = 17,2 \text{ МПа}.$$

Участок D-E

$$\tau_{\max D-E} = \frac{M_{KD-E}}{W_{\rho 2}} = \frac{382 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 55^3} = 11,5 \text{ МПа.}$$

Строим эпюру касательных напряжений τ в определенном масштабе.

Параллельно оси вала проводим базовую линию (рис. 12, з). От базовой линии в определенном масштабе по участкам откладываем числовые значения τ . Знак величины касательного напряжения определяется знаком момента МК на соответствующем участке.

5. Построение эпюры углов поворотов сечений

Углы поворотов сечений φ для участков, выделенных двумя соседними характерными сечениями, определяем по формуле:

$$\varphi = \frac{M_K l}{GJ_\rho}$$

В сечении B на вал действует момент движущих сил T_1 , в сечениях A , C , D , E действуют моменты сил сопротивления T_2 , T_3 , T_4 , T_5 соответственно. При расчете деформаций вала за условно неподвижное принимаем сечение B , так как моменты T_2 , T_3 , T_4 , T_5 стремятся повернуть соответствующие сечения на зрителя при фиксированном сечении B .

Определяем углы поворотов поперечных сечений φ (углы закручивания).

Сечение A

$$\varphi_{A-B} = \frac{M_{KA-B} l_{A-B}}{GJ_{\rho 2}} = \frac{191 \cdot 10^3 \cdot 100}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 55^4} = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

На такой угол повернется сечение A относительно сечения B . Откладываем числовое значение φ_{A-B} в сечении A в направлении действия внешнего момента T_2 , полученную точку соединяем прямой линией с точкой на нулевой линии в сечении B , так как на участке вала $A-B$ углы изменяются по закону прямой линии.

Сечение C

$$\varphi_{C-B} = \frac{M_{KB-C} l_{B-C}}{GJ_{\rho 1}} = \frac{955 \cdot 10^3 \cdot 100}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 63^4} = 7,6 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

На такой угол повернется сечение C относительно сечения B . Откладываем числовое значение φ_{C-B} в сечении C в направлении действия внешнего момента T_3 , полученную точку соединяем прямой линией с точкой на нулевой линии в сечении B .

Сечение D

Угол поворота сечения D по отношению к сечению B получен суммированием углов поворотов сечений φ_{C-B} и φ_{D-C} :

$$\varphi_{D-B} = \varphi_{C-B} + \varphi_{D-C}$$

Сечение D повернется относительно сечения C на угол:

$$\varphi_{D-C} = \frac{M_{KC-D} l_{C-D}}{GJ_{\rho 2}} = \frac{573 \cdot 10^3 \cdot 100}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 55^4} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Отсюда:

$$\varphi_{D-B} = 7,6 \cdot 10^{-4} + 7,8 \cdot 10^{-4} = 15,4 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Откладываем числовое значение φ_{D-B} в сечении D в направлении действия момента T_4 .

Сечение E

Угол поворота сечения E по отношению к сечению B получен суммированием углов поворотов сечений φ_{D-B} и φ_{E-D} :

$$\varphi_{E-B} = \varphi_{D-B} + \varphi_{E-D}.$$

Сечение E повернется относительно сечения D на угол:

$$\varphi_{E-D} = \frac{M_{KD-E} l_{D-E}}{GJ_{\rho 2}} = \frac{382 \cdot 10^3 \cdot 100}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 55^4} = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Отсюда:

$$\varphi_{E-B} = 15,4 \cdot 10^{-4} + 5,2 \cdot 10^{-4} = 20,6 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Полученное значение $\varphi_{E-B} = 20,6 \cdot 10^{-4}$ рад откладываем в сечении E в направлении внешнего скручивающего момента T_5 (рис. 11, и).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Механика: сборник задач. В 3 ч. Ч. 1. Равновесие тела под действием плоской системы сил. Равновесие системы сил. Растяжение (сжатие) / сост. Л.В. Мальцев, В.М. Зиомковский, И.В. Троицкий, Л.П. Вязкова, В.И. Кузнецов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2005. 30 с.
2. Механика: сборник задач. В 3 ч. Ч. 2. Кручение. Изгиб / сост. В.М. Зиомковский, Л.П. Вязкова, В.И. Кузнецов, Л.В. Мальцев, И.В. Троицкий. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2005. 32 с.
3. Механика: Сборник задач. В 3 ч. Ч. 3. Сложное сопротивление. Прочность при переменных напряжениях. Кинематика механических передач. Кинематический анализ сложных механизмов / сост. С.В. Бутаков, В.И. Вешкурцев, А.А. Лаптев, С.В. Парышев. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2004. 45 с.
4. Прикладная механика: методические указания по выполнению расчетно-графических работ / Л.П. Вязкова, Л.В. Мальцев, С.В. Парышев. Екатеринбург: УГТУ, 1996. Ч. 1. 32 с.

Учебное электронное текстовое издание

Вязкова Людмила Павловна
Мальцев Лев Витальевич
Бутаков Сергей Васильевич

МЕХАНИКА

Часть 1

Редактор
Компьютерная верстка

К.Б. Позднякова
Н.В. Лутова

Рекомендовано РИС ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
Разрешен к публикации 20.06.06.
Электронный формат – PDF
Формат 60x90 1/8

Издательство ГОУ-ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: sh@uchdep.ustu.ru

Информационный портал
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
<http://www.ustu.ru>